



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Variazione dell'obliquità di Giove e Saturno durante la migrazione planetaria

Relatore:

PROF. FRANCESCO MARZARI

Laureando:

CHIARA INNOCENTIN

Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione	iii
1 Dinamiche di spin-orbita	1
1.1 Asse di spin	1
1.2 Stati di Cassini	3
2 Evoluzione orbitale dei pianeti giganti	6
3 Giove	8
3.1 Primo stadio	8
3.2 Secondo stadio	9
3.3 Piano orbitale	11
3.4 Moto dell'asse di spin	12
3.5 Momento d'inerzia	13
4 Saturno	16
4.1 Piano orbitale	17
4.2 Stati di Cassini	18
4.3 Traiettorie dell'asse di spin	19
4.4 Evoluzione del sistema	20
4.5 Kuiper belt	23
4.6 Discussione sulla librazione	24
5 Conclusioni	25
Bibliografia	26

Introduzione

L'attuale formazione e struttura del sistema solare può essere spiegata solo assumendo una migrazione radiale dei pianeti nel corso degli anni, tenendo in considerazione le interazioni tra i pianeti stessi e i planetesimi.

Quello che noi conosciamo deriva unicamente da modelli di migrazione planetaria, costruiti considerando composizione di pianeti terrestri e non, e popolazioni di piccoli corpi e asteroidi nella Kuiper belt. Uno dei modelli migliori postula l'esistenza di un ulteriore gigante di ghiaccio, che venne espulso, andando a modificare le orbite dei pianeti del sistema solare a causa dell'incontro con esso. In questa tesi terremo in considerazione questo modello.

Durante l'evoluzione del sistema solare non sono variate solo le posizioni rispettive dei pianeti, ma anche le loro caratteristiche orbitali e proprie, come l'obliquità. Quest'ultima è l'angolo tra l'asse di spin di un pianeta e la normale al suo piano orbitale. La teoria del "core accretion" implica che le obliquità primordiali di Giove e Saturno dovessero essere molto piccole, questo perché il momento angolare di rotazione era quasi interamente contenuto nei loro involucri di idrogeno ed elio gassosi, derivati dal disco nebulare. Le obliquità degli altri pianeti nel sistema solare sono dovute alla natura casuale della loro formazione a partire da planetesimi solidi.

Ward & Hamilton [2] e Hamilton & Ward [3] notarono che la frequenza di precessione dell'asse di spin di Saturno ha un valore vicino a g_8 , ovvero alla regressione nodale media dell'orbita di Nettuno (o anche l'ottava frequenza propria nodale del sistema planetario). Allo stesso modo, Giove ha un valore vicino a g_7 , la regressione nodale media dell'orbita di Urano. Queste somiglianze sono importanti perché ci fanno pensare che l'obliquità dei due pianeti sia il risultato della cattura dell'asse di spin in risonanza con la precessione dei pianeti giganti.

Questa cattura può avvenire quando la precessione del vettore di spin cresce e tende a g_8 o g_7 , oppure quando esse diminuiscono, a causa dell'esaurimento della Kuiper belt originale. Se quindi l'evoluzione dopo la cattura è sufficientemente lenta, la risonanza di spin orbita può far aumentare l'obliquità dei pianeti considerati.

In questa tesi andremo a studiare la variazione delle obliquità di questi due pianeti, andando a considerare due periodi di migrazione (prima e dopo l'instabilità) e analizzando i possibili casi che possono aver portato al loro valore attuale.

Le obliquità di Giove e Saturno sono oggi uno dei vincoli più importanti da soddisfare per costruire un buon modello che spieghi la migrazione dei pianeti, dal momento che esse devono essere soddisfatte contemporaneamente.

Capitolo 1

Dinamiche di spin-orbita

1.1 Asse di spin

L'equazione che regola il moto del vettore unitario di spin \mathbf{s} è:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \alpha(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s} \times \mathbf{n}), \quad (1.1.1)$$

dove \mathbf{n} è il vettore unitario normale al piano orbitale del pianeta e α è la costante di precessione. Quest'ultima dipende dalla forza del momento torcente esercitato dal Sole sul pianeta o, nel nostro caso, sui satelliti piuttosto che sul pianeta stesso. I satelliti tuttavia sono gravitazionalmente situati sul piano orbitale del pianeta e, in tal modo, il sistema precece unitamente. La precessione consiste quindi in una rotazione dell'asse di spin del pianeta attorno ad un altro asse, causata dall'attrazione gravitazionale del Sole, dei satelliti che vi ruotano attorno e dagli altri pianeti del sistema solare. La costante di precessione può essere scritta come:

$$\alpha = \frac{3 n^2 J_2 + q}{2 \omega \lambda + l}, \quad (1.1.2)$$

dove ω è la frequenza di spin del pianeta, il moto medio eliocentrico è definito da $n = GM_\odot/b^3$ (con M_\odot la massa del sole e $b = a\sqrt{1-e^2}$), J_2 è il momento di quadrupolo del suo campo gravitazionale e $\lambda = C/MR^2$ è il suo momento di inerzia C normalizzato ad un fattore standard MR^2 , con M e R la massa e il raggio del pianeta. La quantità q :

$$q = \frac{1}{2} \sum_j \frac{(m_j/M)(a_j/R)^2 \sin(\theta - i)}{\sin \theta} \quad (1.1.3)$$

è l'effettivo coefficiente di quadrupolo del sistema di satelliti dove q/J_2 è il rapporto tra il momento torcente sui satelliti e quello esercitato direttamente sul pianeta. R ed i sono inclinazione e raggio del pianeta. Infine l :

$$l \equiv \sum_j (m_j/M)(a_j/R)^2(n_j/\omega) \quad (1.1.4)$$

è il momento angolare del sistema di satelliti normalizzato a $MR^2\omega$, dove m_j , a_j , n_j , sono rispettivamente le masse, il raggio dell'orbita e il moto medio planetocentrico dei satelliti, mentre i_j è l'inclinazione del piano dell'orbita del satellite rispetto all'equatore del pianeta.

Osservazioni dallo spazio hanno potuto misurare J_2 , q e l . Usando modelli si è potuto determinare anche λ in un certo range di valori e di conseguenza α . Il problema a questo punto è che i valori ottenuti da Helled et al. (2011) [11] sono diversi da quelli di Hamilton & Ward [3] e Ward & Hamilton [2], che però potrebbero essere soggetti ad incertezze maggiori del previsto. I valori ottenuti da Helled sono tra 2.754 e 2.772 arcsec yr⁻¹ per α_J e tra 0.8443 e 0.8447 arcsec yr⁻¹ per α_S . Per eliminare questo problema prendiamo un range di valori per α più ampio, sia per Giove che per Saturno.

Se assumiamo α costante per un momento, il problema nell'equazione di \mathbf{s} risiede nell'evoluzione temporale di \mathbf{n} . Questo perché, in centinaia di migliaia di anni, le interazioni mutue tra i pianeti hanno fatto precedere le loro orbite nello spazio, inoltre inizialmente queste precessioni erano più veloci a causa dei momenti torcenti generati dai planetesimi. Nella parametrizzazione Kepleriana delle orbite il vettore \mathbf{n} dipende dalla longitudine dei nodi Ω e dall'inclinazione I , in questo modo abbiamo che $\mathbf{n}^T = (\sin I \sin \Omega, -\sin I \cos \Omega, \cos I)$, il problema della dipendenza dal tempo è risolto usando una trasformazione in un sistema di riferimento fisso con l'orbita, dove $\mathbf{n}^T = (0, 0, 1)$. Otteniamo allora una nuova equazione per \mathbf{s} :

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -[\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{n} + \mathbf{h}] \times \mathbf{s}. \quad (1.1.5)$$

La dipendenza dal tempo si è ora spostata sulla quantità $\mathbf{h}^T = (A, B, -2C)$ dove:

$$\begin{aligned} A &= \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega}, \\ B &= \sin \Omega \dot{I} + \sin I \cos \Omega \dot{\Omega}, \\ C &= \sin^2 I / 2 \dot{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Un'ulteriore sviluppo si può ottenere introducendo un parametro complesso non singolare $\zeta = \sin(I/2) \exp(i\Omega)$ al posto di I e Ω . Per la teoria perturbativa ζ può essere

espresso come somma finita di termini di Fourier con ampiezze derivate da condizioni iniziali e frequenze g_i , che dipendono unicamente dal semiasse maggiore e dalla massa del pianeta. Per le teorie non lineari invece ζ può essere rappresentato come espansione in serie di Fourier $\zeta = \sum A_i \exp[i(g_i t + \phi_i)]$. Di conseguenza i termini g_7 e g_8 sono i più grandi nella rappresentazione in ζ di Urano e Nettuno rispettivamente e compaiono anche nelle variabili di Giove e Saturno. Le equazioni precedenti in termini di ζ diventano:

$$\begin{aligned} A + iB &= \frac{2}{\sqrt{1 - \zeta\bar{\zeta}}} \left(\frac{d\zeta}{dt} - i\zeta C \right), \\ C &= \frac{1}{2i} \left(\bar{\zeta} \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\bar{\zeta}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Possiamo anche notare che l'equazione (1.1.5) deriva dall'Hamiltoniana:

$$H = -\frac{\alpha}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})^2 - g(\mathbf{h} \cdot \mathbf{s}), \quad (1.1.8)$$

in modo che: $d\mathbf{s}/dt = -\nabla_{\mathbf{s}} H \times \mathbf{s}$.

1.2 Stati di Cassini

Possiamo scrivere il vettore di spin come: $\mathbf{s}^T \equiv (x, y, z) \equiv (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, dove θ è l'obliquità e ϕ l'angolo di precessione. Prendiamo allora $X = \cos \theta$ come momento coniugato di ϕ e riscriviamo l'Hamiltoniana:

$$H(X, \phi; t) = \frac{\alpha}{2} X^2 - 2CX + \sqrt{1 - X^2}(A \sin \phi + B \cos \phi). \quad (1.2.1)$$

Per le orbite di piccola inclinazione C è trascurabile, mentre A e B vengono espansi in serie di Fourier. Applichiamo inoltre il modello introdotto da Colombo [7], che considera solo un termine di Fourier in A e in B . In questo modello l'inclinazione dell'orbita è fissata e i nodi precedono con frequenza costante. Il singolo termine di Fourier può essere espresso come $\zeta = A \exp[i(st + \psi)]$ con $A = \sin I/2$ e $\Omega = st + \psi$. Facciamo quindi una trasformazione canonica con $X' = -X$ e $\varphi = -(\phi + \Omega)$ e dividiamo per g , in modo da ottenere un'Hamiltoniana che non dipenda dal tempo:

$$H(X', \varphi) = \kappa X'^2 - \cos I X' + \sin I \sqrt{1 - X'^2} \cos \varphi, \quad (1.2.2)$$

dove $\kappa = \alpha/(2g)$.

Le soluzioni si ottengono andando a considerare i punti stazionari $H(X', \varphi) = C$, con C costante. A seconda dei parametri (κ, I) ci sono due o quattro soluzioni stazionarie, chiamate gli stati di Cassini C_i . In tali punti l'asse di spin rimane complanare a \mathbf{n} e a \mathbf{k} (la normale al piano invariante, ovvero il piano ortogonale al vettore di momento angolare del sistema solare) e stazionario nel sistema rotante, questo significa che nel sistema rotante questi tre vettori precedono con la stessa velocità (figura (1.1)). Due di questi stati, chiamati 1 e 4, sono nello stesso lato di \mathbf{n} rispetto a \mathbf{k} ; lo stato 2 è nel lato opposto (lo stato 3 è retrogrado e non ci interessa). Usando la convenzione definita da Peale (1974) [12], misuriamo θ_i in senso orario a partire da \mathbf{n} , ottenendo che le obliquità degli stati di Cassini possono essere trovate dall'equazione:

$$\kappa \sin 2\theta = -\sin(\theta - I). \quad (1.2.3)$$

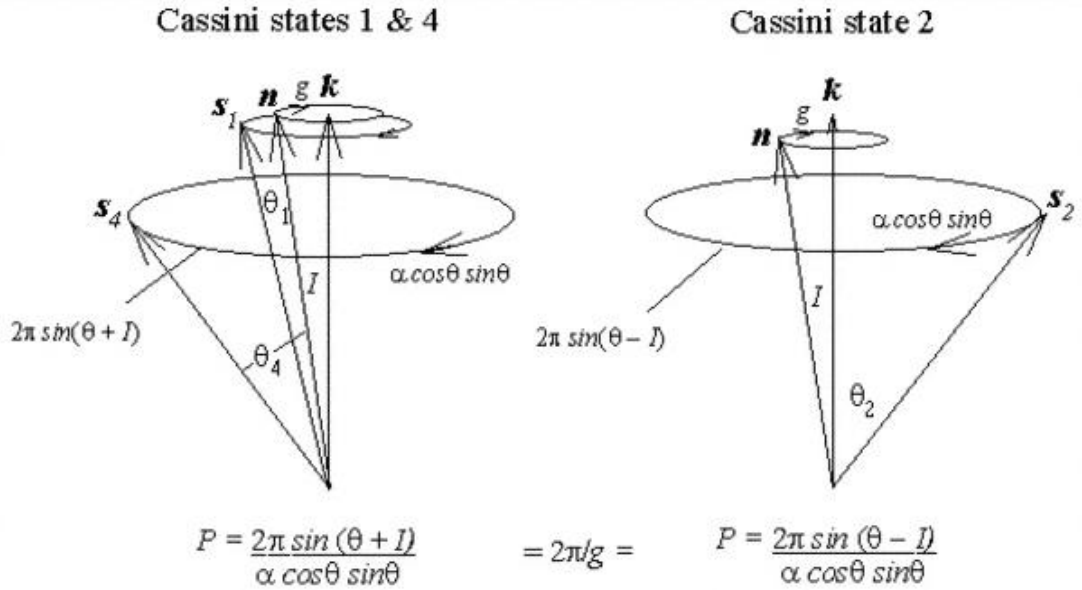


Figura 1.1: Precessione della normale all'orbita \mathbf{n} e le posizioni degli assi di spin degli stati di Cassini \mathbf{s}_i rispetto alla normale \mathbf{k} al piano invariante.

Il valore critico di κ è dato da:

$$\kappa_{crit}(I) = \frac{1}{2}(\sin^{2/3} I + \cos^{2/3} I)^{3/2}, \quad (1.2.4)$$

che per I piccoli, $\kappa_{crit} \simeq \frac{1}{2}$. Le soluzioni stazionarie sono localizzate nei due meridiani del sistema di riferimento orbitale $\varphi = 0^\circ$ e $\varphi = 180^\circ$, come si vede in figura (1.1).

Noi andremo a studiare solo il primo, dal momento che lo stato di Cassini C_2 , quello che a noi interessa maggiormente, è localizzato in esso. Andiamo ad analizzare cosa succede attorno a C_2 , supponendo quindi che Giove e Saturno ruotino attorno a questo stato.

Per Giove, sostituendo $g = g_7$ nell'equazione di κ , otteniamo che $\kappa < \kappa_{crit}$, quindi \mathbf{s} deve ruotare attorno a C_2 . Per Saturno otteniamo che $\kappa > \kappa_{crit}$, quindi \mathbf{s} deve librare nella zona risonante attorno a C_2 . Le librazioni vengono rivelate dalle piccole deviazioni del vettore di spin da questo stato ideale. La massima deviazione dell'obliquità nella zona risonante è:

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{|\kappa|} \sqrt{\frac{\sin 2I}{\sin 2\theta_4}}, \quad (1.2.5)$$

formula analitica nella quale θ_4 è l'obliquità dello stato di Cassini instabile 4.

Capitolo 2

Evoluzione orbitale dei pianeti giganti

Il modello creato da Nesvorný e Morbidelli nel 2012 [9], che andiamo a considerare in questa tesi, è il risultato di 10^4 integrazioni numeriche di instabilità planetarie che partono da centinaia di differenti configurazioni iniziali dei pianeti, ottenuti da calcoli di problemi a N corpi. La configurazione iniziale in cui Giove e Saturno sono in risonanza 3:2 è di particolare importanza perché deriva dalla migrazione radiale di essi dovuta alla dispersione del disco di gas. Tenendo conto di questa risonanza e della massa del disco, i risultati migliori sono quelli in cui viene assunto che nel sistema solare iniziale erano presenti 5 pianeti giganti tra i quali un gigante di ghiaccio, che venne successivamente espulso da Giove.

La caratteristica più importante di questo modello però è il fatto che la migrazione planetaria viene divisa in due stadi: prima e dopo il periodo di instabilità. Nel primo stadio Nettuno migra nel disco più esterno a 20/30 AU, in modo esponenzialmente veloce. L'instabilità inizia quando Nettuno raggiunge le 28 AU, dura 10^5 anni e termina quando il quinto pianeta gigante viene espulso da Giove. In questo periodo quello che succede è che vi sono incontri planetari soprattutto tra i pianeti giganti e gli altri pianeti. Il secondo stadio inizia dopo il periodo di instabilità, qui la migrazione di Nettuno è molto più lenta perché il disco più esterno è impoverito. Urano segue la migrazione di Nettuno in tempi-scala simili. Le frequenze g_7 e g_8 quindi sono inizialmente più grandi delle costanti di precessione di Giove e Saturno e decrescono lentamente durante entrambi gli stadi, il termine dovuto al terzo gigante di ghiaccio non influenza la loro obliquità.

Per quanto riguarda g_8 , questa frequenza attraversa il valore della costante di precessione di Giove durante il primo stadio, in esso le orbite planetarie sono all'in-

circa complanari e quindi gli effetti sull'obliquità di Giove sono trascurabili. Durante questo stadio inoltre $dg_8/dt \sim 0.1 \text{ arcsec yr}^{-1} \text{ Myr}^{-1}$, ma il valore attuale dipende da diversi fattori, quindi, anche per esso, consideriamo un certo range in modo da diminuire gli errori. Nel secondo stadio invece g_8 raggiunge il valore della precessione di Saturno, con il quale entra in risonanza, e la sua evoluzione è molto più lenta: $dg_8/dt \sim 0.01 \text{ arcsec yr}^{-1} \text{ Myr}^{-1}$. In questo stadio le inclinazioni orbitali dei pianeti sono probabilmente quelle attuali, in quanto esse sono state eccitate durante l'instabilità.

Per quanto riguarda g_7 essa, durante la fine della migrazione, ha raggiunto la costante di precessione di Giove e andremo a studiarla in approssimazione adiabatica.

Nell'immagine (2.1) sono mostrate le evoluzioni del semiasse maggiore, delle distanze di afelio e perielio dei pianeti giganti, durante due stadi della migrazione planetaria, prima e dopo la fase di instabilità.

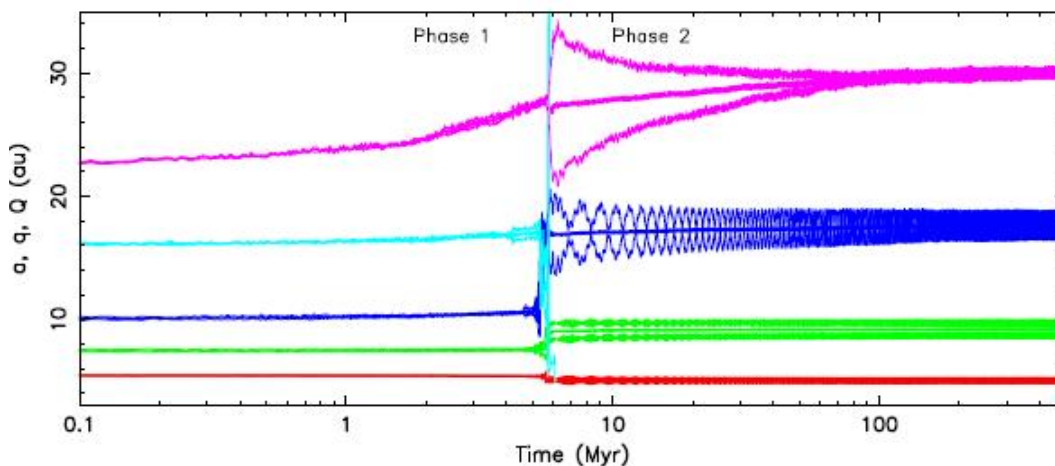


Figura 2.1: Grafico rappresentante la migrazione planetaria e il periodo di instabilità ricavato dalle simulazioni di Nesvorný & Morbidelli (2012). Le linee tra 16 e 22 AU rappresentano i semiassi maggiori di Giove e Saturno, mentre le linee sottostanti rappresentano le distanze di afelio e perielio dei pianeti giganti. L'instabilità inizia a $t \simeq 5.6 \text{ Myr}$.

Capitolo 3

Giove

3.1 Primo stadio

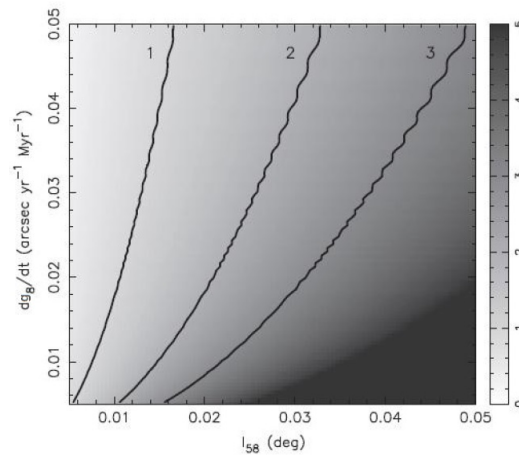


Figura 3.1: Obliquità finale di Giove ottenuta dalle integrazioni considerando l'attraversamento in risonanza. La scala di grigio a destra indica l'obliquità finale in gradi, maggiore verso il grigio più scuro. Le tre linee rappresentano obliquità di $\theta_{fin} = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$.

Andiamo a studiare cosa succede nel primo stadio. Per quanto riguarda Saturno, α_S (costante di precessione) rimane molto più piccola di g_8 e quindi non ci sono importanti effetti. Ci focalizziamo allora su Giove e sull'incontro tra α_J e g_8 . Non conosciamo in questo caso i valori esatti di dg_8/dt e di I_{58} , in quanto dipendono dalle condizioni iniziali, consideriamo allora un range di valori, e l'obliquità dipendente da essi. Sfruttiamo il modello di Colombo [7] con un solo termine in ζ , ovvero quello

della frequenza g_8 . Prendiamo I_{58} come un parametro libero con un range di valori tra 0 e il suo valore attuale. Il valore di α_J viene ottenuto scalando il suo valore presente con quello del semiasse maggiore di Giove prima dell'instabilità, usando l'equazione (1.1.2). Facciamo dunque andare g_8 da un valore di $-4 \text{ arcsec yr}^{-1}$ a $-1.2 \text{ arcsec yr}^{-1}$ per ogni test e lasciamo come parametro libero anche dg_8/dt . La figura (3.1) mostra i risultati. Nei casi estremi a sinistra dg_8/dt supera α_J e non riesce a catturare in risonanza il vettore di spin di Giove. Le catture avvengono solo nella regione a destra, dove tuttavia, si generano obliquità troppo grandi. La situazione ideale è quella rappresentata dalla curva 3, in cui il valore dell'obliquità è di circa 3° e quindi non eccitata del tutto, in modo da ottenere l'obliquità presente solo in seguito.

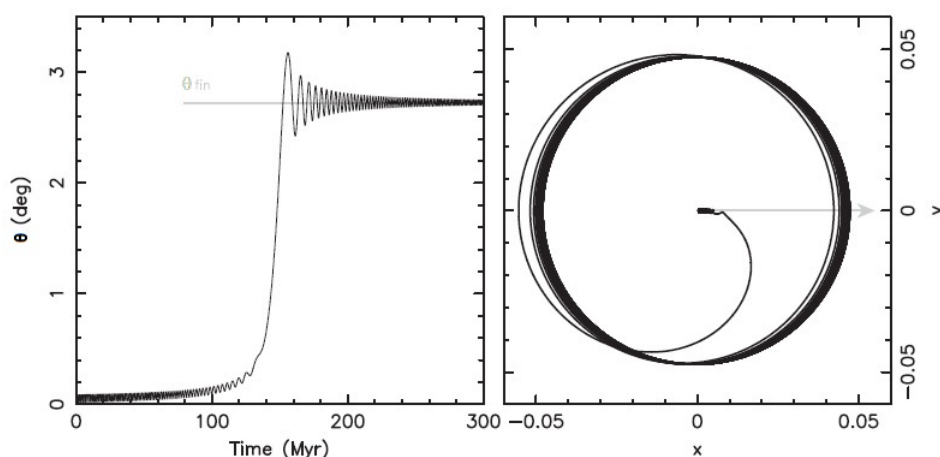


Figura 3.2: Esempio che mostra gli effetti del passaggio di g_8 , su α_J . Poniamo $I_{58} = 0^\circ.02$ e $ds_8/dt = 0.01 \text{ arcsec yr}^{-1} \text{ Myr}^{-1}$. Il riquadro di sinistra mostra l'obliquità di Giove in funzione del tempo, vediamo che essa cresce durante il passaggio in risonanza; quello a destra mostra l'evoluzione dell'asse di spin proiettata nel piano (x, y) dove $x = \sin \theta \cos \varphi$ e $y = \sin \theta \sin \varphi$. Qui lo stato di Cassini C_2 è indicato dalla freccia grigia e si sposta lungo l'asse x , raggiungendo grandi valori di obliquità.

3.2 Secondo stadio

Andando a trattare il secondo stadio, ci rendiamo conto che l'obliquità di Giove può essere stata generata anche dall'incontro tra g_7 e α_J , come suggerito da Ward & Canup [4], dopo il periodo di instabilità. Essi dimostrarono che se κ è abbastanza vicino al suo valore critico 0.5 l'obliquità dello stato di Cassini C_2 è significativa.

Allora, se g_7 approccia adiabaticamente α_J , l'obliquità di Giove viene eccitata con essa. Il caso adiabatico è quello in cui la velocità di variazione dello stato di Cassini, dovuta ad un cambiamento del rapporto α/g , deve essere molto più piccola della velocità dell'asse di spin.

Devono però essere specificati altri due parametri: lo spin iniziale di Giove ed α_J . Per quanto riguarda il primo, lo trattiamo come un parametro libero, per il secondo invece prendiamo un range di valori tra 2.75 e 2.79 arcsec yr⁻¹. La figura (3.3) riporta i risultati. Il primo riquadro mostra la dipendenza dell'obliquità di

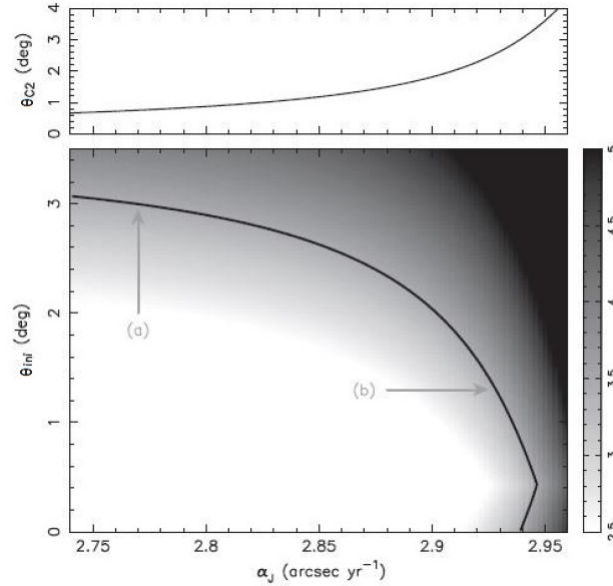


Figura 3.3: Il riquadro in alto mostra il valore dell'obliquità di C_2 in funzione di α_J . Quello in basso l'obliquità finale di Giove risultante da un'approccio adiabatico tra g_7 e α_J . Nella barra a destra troviamo l'obliquità finale in gradi, la regione bianca corrisponde ad un'obliquità minore di 2°.5. La curva più spessa equivale a 3°.45 e rappresenta il valore attuale. Le frecce mostrano i casi (a) e (b) della figura (3.4).

C_2 dal valore assunto di α_J , la tendenza è quella di crescere con α_J . Se $\alpha_J < 2.8$ arcsec yr⁻¹, allora θ_{C_2} è troppo piccola per contribuire all'obliquità di Giove. Questo implica che l'obliquità di Giove deve essere stata acquisita durante i primi stadi e può essere correlata ad una risonanza non adiabatica con g_8 (come visto in 3). Se invece $\alpha_J \simeq 2.92 - 2.94$ arcsec yr⁻¹ allora la sua obliquità è dovuta alla prossimità tra α_J e g_7 . Probabilmente quello che succede è una via di mezzo tra entrambi i casi.

La figura (3.4) illustra i due casi precedenti. In (a) assumiamo che l'obliquità di Giove sia eccitata durante l'attraversamento di g_8 e poniamo $\alpha_J = 2.77$ arcsec yr⁻¹.

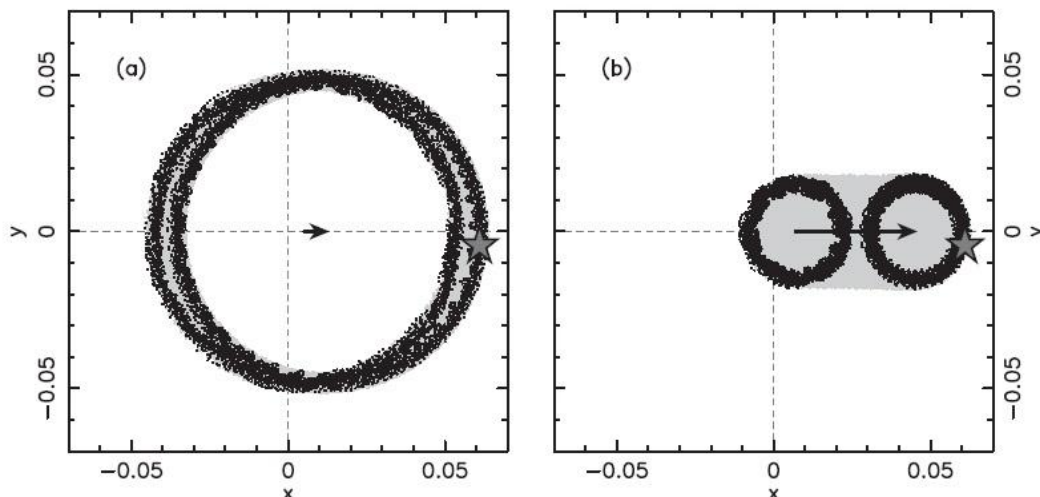


Figura 3.4: Due esempi dell'evoluzione dello stato di spin di Saturno in un intervallo di tempo di 1 Gyr dopo l'instabilità. Le coordinate cartesiane usate sono: $x = \sin \theta \cos \varphi$ e $y = \sin \theta \sin \varphi$. La freccia mostra l'evoluzione dello stato di Cassini C_2 , la stella mostra la posizione attuale del polo di Giove in queste coordinate. I parametri usati per i due casi sono: (a) $\alpha_J = 2.77 \text{ arcsec yr}^{-1}$ e $\theta_{in} = 3^\circ.1$; (b) $\alpha_J = 2.93 \text{ arcsec yr}^{-1}$ e $\theta_{in} = 1^\circ.3$.

Lo stato di cassini C_2 corrispondente al termine g_7 è leggermente spostato da centro della figura e non contribuisce al valore di obliquità presente. In (b) è stato posto $\alpha_J = 2.93 \text{ arcsec yr}^{-1}$, questo implica che $\theta_{C_2} \simeq 2^\circ.6$. L'obliquità di Giove è dovuta in gran parte al termine forzante che deriva dalla prossimità con g_7 .

3.3 Piano orbitale

Andiamo a vedere come studiare il piano orbitale dei pianeti, in modo da poter utilizzare queste considerazioni nei capitoli successivi. I piani orbitali di tutti i pianeti hanno una certa inclinazione rispetto al piano invariante (ovvero il piano perpendicolare al momento angolare totale del sistema solare che passa per il suo baricentro) e sono soggetti ad una regressione non uniforme a causa delle perturbazioni gravitazionali che esercitano l'un l'altro. Così anche quello di Giove e di Saturno. L'inclinazione I e il nodo ascendente Ω di un pianeta sono allora dati da:

$$\sin \frac{I}{2} \sin \Omega = \sum_j \frac{I_j}{2} \sin(g_j t + \delta_j) \quad \sin \frac{I}{2} \cos \Omega = \sum_j \frac{I_j}{2} \cos(g_j t + \delta_j), \quad (3.3.1)$$

che comprendono diversi termini di ampiezze I_j e frequenze g_j . I termini di ampiezza più importanti sono 8, 7, 6 e sono dovuti rispettivamente alla regressione nodale di Nettuno, Urano e alla mutua precessione orbitale tra Giove e Saturno. Essi rappresentano i contributi di tre degli otto modi fondamentali di una soluzione di Laplace-Lagrange per l'evoluzione secolare del sistema solare.

3.4 Moto dell'asse di spin

Il moto dell'asse di spin può essere scritto in componenti come:

$$\begin{aligned}\dot{s}_x &= \alpha(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(s_y n_z - s_z n_y), \\ \dot{s}_y &= -\alpha(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(s_x n_z - s_z n_x), \\ \dot{s}_z &= \alpha(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(s_x n_y - s_y n_x),\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

dove $\{s_i, n_i\}$ sono scritti rispetto al piano invariante. Al primo ordine possiamo porre $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \approx n_z \approx s_z \approx 1$, ottenendo:

$$\dot{s}_x = \alpha(s_y - n_y), \quad \dot{s}_y = -\alpha(s_x - n_x).\tag{3.4.2}$$

Differenziando la seconda e sostituendo la prima otteniamo l'equazione per un oscillatore armonico forzato, che ha sia un soluzione omogenea che una particolare. Quella omogenea è data da:

$$s_{x,h} = \theta_h \cos(-\alpha t + \delta), \quad s_{y,h} = \theta_h \sin(-\alpha t + \delta).\tag{3.4.3}$$

Mentre quella particolare:

$$\begin{aligned}s_{x,p} &= \sum_j \frac{\alpha I_j}{\alpha + g_j} \cos\left(g_j t + \delta_j - \frac{\pi}{2}\right), \\ s_{y,p} &= \sum_j \frac{\alpha I_j}{\alpha + g_j} \sin\left(g_j t + \delta_j - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\tag{3.4.4}$$

L'ampiezza θ_h rappresenta la parte libera del moto dell'asse di spin e, in assenza di essa, la soluzione particolare rappresenta la posizione forzata dell'asse di spin dovuta al moto del piano orbitale. Possiamo immaginare la somma di parte forzata e libera, come somma vettoriale, in modo che il moto possa essere pensato come un moto attorno ad un cerchio con velocità costante.

Per Giove il termine $j = 7$ è quello più importante, di conseguenza esso domina il moto e possiamo quindi porci nel sistema di riferimento che ruota con questa frequenza. La soluzione particolare in questo sistema di riferimento è:

$$\begin{aligned} s'_{x,p} &= -\frac{\alpha I_7}{\alpha + g_7} + \sum_{j \neq 7} \frac{\alpha I_j}{\alpha + g_j} \cos[(g_j - g_7)t + \phi_j], \\ s'_{y,p} &= \sum_{j \neq 7} \frac{\alpha I_j}{\alpha + g_j} \sin[(g_j - g_7)t + \phi_j]. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

dove abbiamo definito la nuova fase $\phi_j = \delta_j - \delta_7 - \pi$.

La parte variabile con il tempo non dipende da α ma è dominata dal termine $j = 6$, mentre il termine che non dipende dal tempo è molto sensibile ad α , poiché diverge per $\alpha + g_7 \rightarrow 0$.

La divergenza avviene perché il problema è stato linearizzato, questa singolarità può essere rimossa rimpiazzando il termine guida con θ_g , che rappresenta un "guiding centre" attorno al quale vi è una rotazione dell'asse di spin ad alta frequenza, causata dagli altri termini. Si può dimostrare che il moto di θ_g è simile a quello dell'asse di spin, nel caso di precessione orbitale uniforme, a patto di porre $I = I_7$ e $\dot{\Omega} = g_7$.

Gli stati di Cassini sono situati sull'asse x ad una distanza angolare θ_c data dalla soluzione all'equazione $\alpha \cos(\theta_c + I_7) \sin(\theta_c + I_7) + g_7 \sin \theta_c = 0$ che ha due o quattro soluzioni, che sono proprio gli stati di Cassini. Notiamo che questa corrisponde all'equazione trascendentale (1.2.4), ma ci permette di trovare più facilmente θ_c . Assumendo che il polo si trovi vicino allo stato 2, prendiamo il rispettivo angolo θ_c e risolviamo per α e λ e valutiamo il resto del sistema (3.4.5).

3.5 Momento d'inerzia

Dal momento che la posizione dell'asse di spin è dovuta a diversi fattori forzanti e liberi, non possiamo fare un unico fit per θ_h , δ' e α , dove δ' è la fase della soluzione omogenea nel sistema di riferimento rotante. Partendo da un punto qualsiasi $(s'_{x,p}, s'_{y,p})$ lungo la linea dei possibili stati di Cassini generalizzati (figura (3.5)), l'ampiezza e la fase del contributo libero sono dati dal vettore che connette quel punto con il polo osservato (s'_x, s'_y) , ottenendo allora:

$$\begin{aligned} \theta_h &= [(s'_x - s'_{x,p})^2 + (s'_y - s'_{y,p})^2]^{1/2}, \\ \sin \delta' &= \frac{(s'_y - s'_{y,p})}{\theta_h}. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

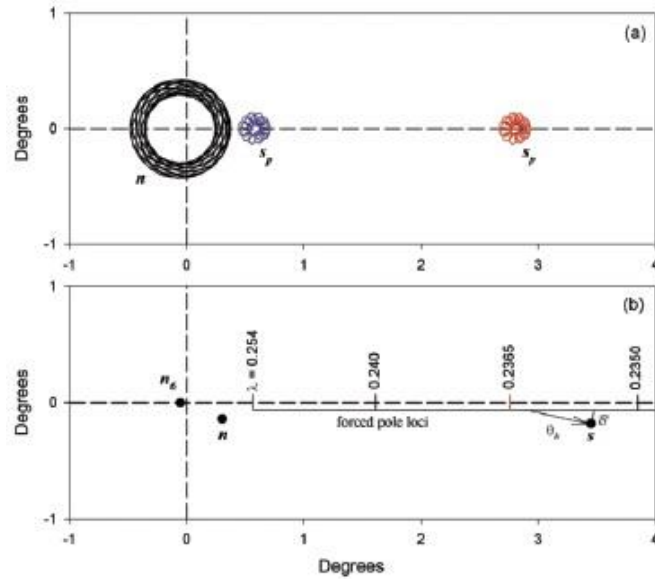


Figura 3.5: Nel riquadro (a) in nero è rappresentata la traiettoria della normale all'orbita mentre in rosso e in blu le traiettorie del polo forzato, per due diversi valori del momento di inerzia λ : $\lambda = 0.254$ (blu), $\lambda = 0.2365$ (rosso). L'integrazione è fatta per il prossimo milione di anni in un sistema di riferimento rotante a frequenza $g_6 = -2.995 \text{ arcsec yr}^{-1}$. Nel riquadro (b) è mostrato il luogo dei punti per il polo forzato corrente per vari valori di λ . \mathbf{n} rappresenta la corrente locazione della normale all'orbita, \mathbf{s} la locazione dell'asse di spin di Giove, \mathbf{n}_6 l'effettiva normale all'orbita dovuta alla perturbazione da parte di Urano. L'ampiezza θ_h e la fase δ' della soluzione libera sono trovate facendo partire un vettore da una posizione qualsiasi lungo la linea dei poli forzati, fino alla posizione dell'asse di spin.

Nella figura (3.6) mostriamo l'evoluzione temporale per i due valori di λ usati prima, integrando per un tempo di $t \sim 24 \text{ Myr}$. Più lontana è la soluzione forzata s_p dall'asse di spin s , meno probabile è trovare l'asse di spin, ad un tempo qualsiasi, vicino alla linea degli stati generalizzati di Cassini. In tal modo gran parte del moto di spin è dovuto alla componente libera θ_h e, nel caso opposto, viceversa.

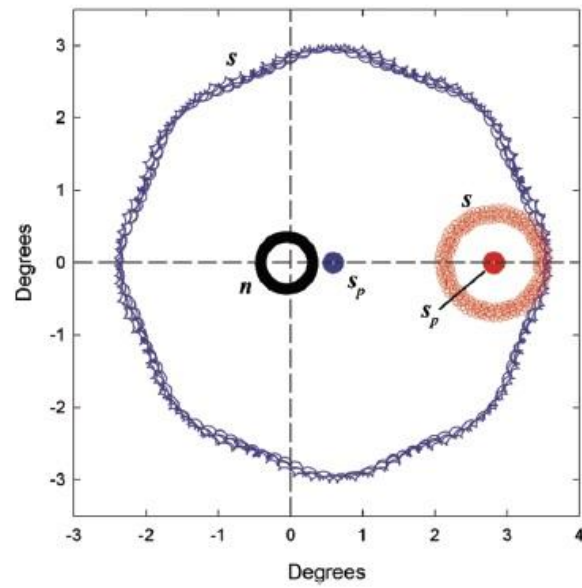


Figura 3.6: La traccia della traiettoria dell'asse di spin, integrata in 24 Myr, per i due valori di λ usati nel in figura (3.5). Se il polo forzato \mathbf{s}_p è lontano da \mathbf{s} (ad esempio la traiettoria blu), gran parte del moto dell'asse di spin è dovuta alla componente libera, l'asse di spin spende più tempo lontano dall'asse x. Se il polo forzato è vicino a \mathbf{s} (traiettoria rossa), allora la componente libera è piccola e l'asse di spin non si allontana dall'asse x.

Capitolo 4

Saturno

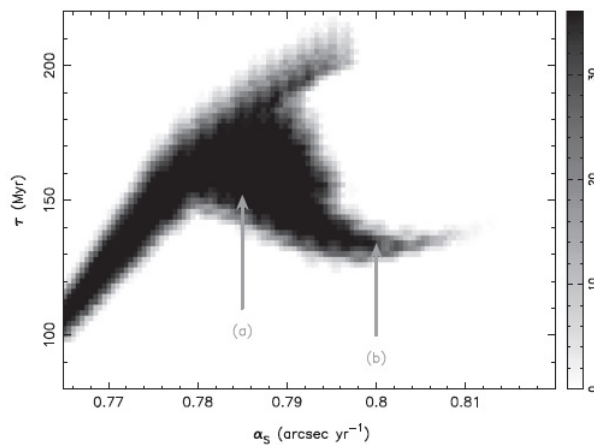


Figura 4.1: Distribuzione delle soluzioni positive per la posizione dell'asse di spin di Saturno. Non vi sono soluzioni positive nella regione bianca, mentre più scura è la scala di grigi, più consistente è la soluzione. Il valore massimo 36 della scala di grigi rappresenta 36 condizioni iniziali campionate per ogni coppia (α_S, τ) . La soluzione con la più grande ampiezza di librazione biforca in due valori di α_S . Le frecce indicano la posizione dei due esempi di figura (4.5).

Per quanto riguarda Saturno tutto succede nel secondo stadio di migrazione planetaria. g_8 deve essersi avvicinato lentamente ad α_S , in modo da catturare in risonanza il vettore di spin di Saturno. Assumiamo inoltre che I_{68} (l'ampiezza dell'ottavo termine di frequenza dell'orbita di Saturno) sia eccitata al suo valore corrente e che la migrazione planetaria sia molto lenta, in modo da parametrizzare

$g_8(t) = g_8 + [g_8(0) - g_8] \exp(-t/\tau)$ con $\tau \geq 80$ Myr e $g_8(0) \simeq -1.3$ arcsec yr⁻¹. Assumiamo un range di valore per α_s .

C'è inoltre un altro parametro da considerare: τ , ovvero il tempo scala di g_8 , che cambia a causa della migrazione residua di Nettuno e dell'impoverimento del disco esterno. I_{68} è considerato costante. Per mantenere il numero di parametri liberi abbastanza basso, assumiamo che \mathbf{s} sia inizialmente vicino al polo del piano invariante e campioniamo 36 valori della longitudine ϕ da 0° a 10°. Un test viene considerato positivo, quindi genera una soluzione accettabile, quando il polo di Saturno simulato sta tra $\pm 0.2^\circ$ in obliquità e $\pm 3^\circ$ in longitudine attorno ai valori $(\theta_8, \varphi_8) \simeq (27^\circ.4, -31^\circ.4)$.

La figura (4.1) mostra i risultati: la regione più scura mostra le coppie (α_s, τ) che soddisfano i requisiti, notiamo che tutte corrispondono alla cattura in una zona risonante attorno allo stato di Cassini C_2 .

Andiamo allora a vedere in che modo siamo arrivati a queste considerazioni e ad analizzare le possibili situazioni sull'evoluzione dell'obliquità di Saturno.

4.1 Piano orbitale

Per quanto riguarda il piano orbitale, esso viene trattato allo stesso modo di Giove, considerando quindi una sommatoria sulle frequenze g_j e ampiezze I_j , delle quali le più importanti sono la mutua precessione orbitale tra Giove e Saturno e le regressioni nodali di Urano e Nettuno.

I modelli numerici si basano sulle frequenze fondamentali dei pianeti giganti. Per ottenere gli elementi orbitali eclittici di Saturno a qualsiasi tempo, determiniamo le fasi istantanee di tutti i termini di Fourier rilevanti, calcoliamo il contributo di ognuno di essi sugli elementi orbitali di Saturno e poi sommiamo tutti i contributi.

Le variazioni dell'inclinazione e del tasso di precessione dell'orbita causano una complicata dipendenza dal tempo da parte della normale all'orbita $\mathbf{n}(t)$, da inserire nell'equazione di \mathbf{s} . Questo può portare a oscillazioni dell'obliquità del pianeta, in quanto l'asse di spin cerca di precedere attorno alla normale all'orbita, che si sta muovendo.

Ci sono buone ragioni per credere che α e g_8 fossero inizialmente diverse, il primo può essere variato durante l'iniziale contrazione di Saturno, mentre il secondo avrebbe dovuto essere più veloce durante le prime epoche, come risultato della presenza di un gran numero di asteroidi nella Kuiper belt. Essendo tuttavia molto simili, qualcosa deve averle cambiate e mantenute in relazione.

4.2 Stati di Cassini

Come nel caso di Giove usiamo anche qui gli stati di Cassini (mostrati in figura (1.1)), dal momento che, anche in questo caso, il vettore di spin di Saturno si trova in vicinanza dello stato C_2 . Ricordiamo che il tasso di variazione dell'orbita di Saturno non è uniforme, ma è composto di frequenze multiple indotte dagli altri pianeti giganti. Di questi prendiamo in considerazione solo i termini che variano lentamente, dal momento che quelli più rapidi tendono a mediarsi nel tempo.

Riarrangiando l'equazione trascendente (1.2.4) si possono trovare le formule approssimate :

$$\theta \approx \tan^{-1} \left(\frac{\sin I}{1 \pm \alpha/g} \right) \quad \theta \approx \pm \cos^{-1} \left(-\frac{g \cos I}{\alpha} \right). \quad (4.2.1)$$

Quando $|\alpha/g| \gg |\alpha/g|_{crit}$ la prima espressione approssima gli stati 1 e 3, mentre la seconda dà gli stati 2 e 4. Quando invece $|\alpha/g| \ll |\alpha/g|_{crit}$ la prima dà gli stati 2 e 3, mentre le altre due radici sono complesse e gli stati 1 e 4 non esistono. Gli stati dall'1 al 3 sono stabili, nel senso che, se l'asse di spin è anche solo leggermente spostato rispetto ad essi, esso tende a circularvi attorno. Lo stato 4, invece, è instabile e giace su una separatrice che divide la sfera in tre domini, ognuno dei quali contiene uno stato stabile. Questa configurazione è mostrata in figura (4.2), dove con S è indicata la posizione attuale dell'asse di spin di Saturno.

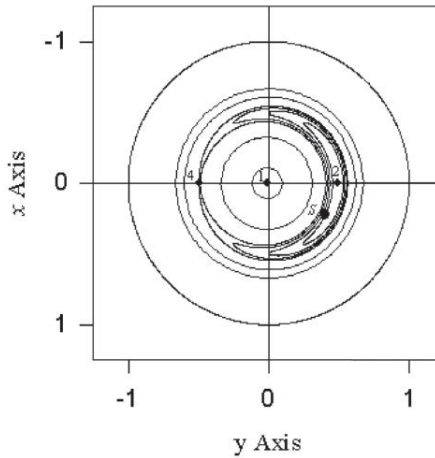


Figura 4.2: Rappresentazione polare della sfera unitaria nel sistema di riferimento $j=8$ per $\alpha/g_8 = -1.16$. S indica la posizione attuale dell'asse di spin di Saturno: esso giace nella separatrice e circola attorno allo stato 2 in traiettorie allungate che producono librazione.

Ruotando \mathbf{s} nelle coordinate invarianti, otteniamo che la configurazione dei poli è vicina allo stato 2, nel quale \mathbf{k} , \mathbf{n} e \mathbf{s} giacciono tutti nello stesso piano. Nel caso di Saturno, proiettando i vettori \mathbf{s} e \mathbf{k} nel piano perpendicolare a \mathbf{n} troviamo che essi formano un angolo di $\Psi_{Sat} = -31^\circ$ dato dalla formula:

$$\sin \Psi_{Sat} = \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n})}{|\mathbf{k} \times \mathbf{n}| |\mathbf{s} \times \mathbf{n}|}. \quad (4.2.2)$$

Di conseguenza il polo di Saturno è abbastanza vicino allo stato 2 per essere soggetto a librazioni stabili.

4.3 Traiettorie dell'asse di spin

Dal momento che nel sistema di equazioni sopra ci sono molti termini, è chiaro che l'inclinazione I e il tasso di regressione dell'orbita $\dot{\Omega}$ non sono costanti. Nell'approssimazione di piccoli angoli, l'equazione del moto dell'asse di spin può essere linearizzata e risolta analiticamente, in modo da esprimere le variazioni di obliquità nella forma:

$$\theta \approx \bar{\theta} - \sum_j \frac{g_j I_j}{\alpha \cos \bar{\theta} + g_j} \sin(\alpha t \cos \bar{\theta} + g_j t + \Delta_j), \quad (4.3.1)$$

dove $\bar{\theta}$ è l'obliquità mediata su un tempo scala lungo e Δ_j sono fasi costanti che dipendono dalle orbite planetarie osservate. Se, a questo punto, esiste un termine della sommatoria, chiamato P , per il quale accade che $\alpha \cos \theta \rightarrow -g_P$, allora l'ampiezza di esso diventa molto grande, mentre la frequenza diminuisce.

La sommatoria di questo termine con $\bar{\theta}$ può essere rimpiazzata, come prima, da θ_g , il "guiding centre".

Definiamo l'angolo di risonanza che abbiamo visto sopra con:

$$\Psi = \phi_\alpha - \phi_g, \quad (4.3.2)$$

dove ϕ_α e ϕ_g sono gli angoli misurati positivamente, da una direzione di riferimento, delle proiezioni di \mathbf{s} e \mathbf{k} nel piano x-y rispettivamente. In questo modo possiamo definire l'inclinazione tramite $\cos I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$ e l'obliquità con $\cos \theta = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$.

Facendo l'approssimazione, valida nel nostro caso, in cui $\theta \gg I$ otteniamo le equazioni per l'evoluzione temporale di Ψ e θ :

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\alpha \cos \theta - g \cos I, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = g \sin I \sin \Psi. \quad (4.3.4)$$

Per le perturbazioni dovute a Nettuno i due termini a destra dell'equazione (4.3.3) si cancellano, Ψ di conseguenza varia lentamente generando grandi obliquità.

Prendendo la derivata dell'equazione (4.3.3) e usando la (4.3.4) otteniamo:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = (\alpha g \sin \theta \sin I) \sin \Psi - (\dot{\alpha} \cos \theta + \dot{g} \cos I), \quad (4.3.5)$$

simile all'equazione del pendolo. Questa equazione può anche esprimere orbite nelle quali Ψ circola attorno a 2π . Queste regioni sono divise da quelle in cui l'oscillazione è minore da un'orbita separatrice, di periodo orbitale infinito, che attraversa un punto di equilibrio. Attraversare una separatrice comporta un passaggio in risonanza e può accadere quando i parametri dell'equazione vengono cambiati.

Il punto di equilibrio stabile è dato da:

$$\Psi_{eq} = \frac{\dot{\alpha} \cos \theta + \dot{g} \cos I}{\alpha g \sin \theta \sin I}. \quad (4.3.6)$$

4.4 Evoluzione del sistema

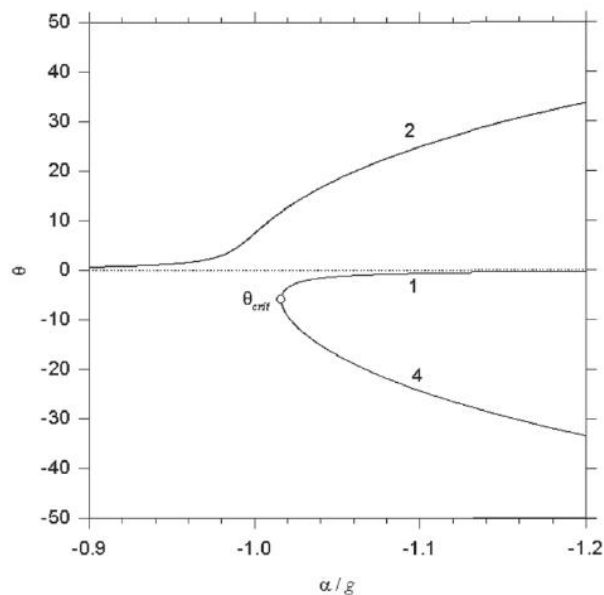


Figura 4.3: Obliquità degli stati di Cassini 1, 2 e 4 in funzione di α/g . Le traiettorie dell'asse di spin circolano attorno agli stati 1 e 2; lo stato 4 è instabile e giace sulla separatrice. Gli stati 1 e 4 si fondono e scompaiono nel punto θ_{crit} .

Se il rapporto α/g cambia, gli stati di Cassini migrano in corrispondenza della figura (4.3). Se questi cambiamenti avvengono abbastanza lentamente, si può dimostrare che l'area racchiusa dalla traiettoria dell'asse di spin attorno allo stato di Cassini rimane pressoché invariante. Siamo quindi nel limite adiabatico.

Se l'asse di spin parte vicino allo stato 2 con $|\alpha/g| \ll 1$ vi rimarrà anche mentre $|\alpha/g|$ cresce e lo stato si allontana da \mathbf{n} . Se a questo punto $|\alpha/g|$ passa il valore critico, quello che succede è che l'obliquità cresce rapidamente e può diventare molto grande, rimanendo comunque attorno allo stato 2: questo è proprio il caso della cattura in risonanza e non è reversibile.

Per contro con $|\alpha/g| \gg 1$, lo stato 1 è vicino a \mathbf{n} , ma si allontana ruotando man mano che $|\alpha/g|$ decresce, mentre lo stato 4 ruota attorno ad esso. Questi due stati si mescolano quando $|\alpha/g| = (\alpha/g)_{crit}$ e in seguito l'asse di spin è obbligato a ruotare attorno al secondo stato. Questa sequenza rappresenta il passaggio della risonanza nella direzione della non-cattura e la possiamo immaginare come un calcio all'obliquità.

Possiamo quantificare le aree racchiuse da ogni dominio. Per quanto riguarda lo stato 2 abbiamo:

$$A_2 = 8\rho + 4 \tan^{-1} T - 8z_0 \tan^{-1}(1/\chi), \quad (4.4.1)$$

dove: $\chi \equiv \sqrt{-\tan^3 \theta_4 / \tan I - 1}$, mentre:

$$\rho \equiv \frac{\chi \sin^2 \theta_4 \cos \theta_4}{\chi^2 \cos^2 \theta_4 + 1}, \quad T \equiv \frac{2\chi \cos \theta_4}{\chi^2 \cos^2 \theta_4 - 1}. \quad (4.4.2)$$

Gli altri due domini possono essere scritti come:

$$A_1 = 2\pi(1 - z_0) - \frac{1}{2}A_2, \quad A_3 = 2\pi(1 + z_0) - \frac{1}{2}A_2. \quad (4.4.3)$$

La figura (4.4) mostra le aree in funzione di α/g . L'area di 2 per la quale vi è il mescolamento tra lo stato 1 e lo stato 4 è data da:

$$A_{crit} = 4\pi[1 - (1 + \tan^{2/3} I)^{-3/2}]. \quad (4.4.4)$$

Se lo stato 2 migra vicino alla normale all'orbita, la precessione diventa quasi uniforme con un'obliquità di:

$$\cos \theta = 1 - \frac{A_{crit}}{2\pi}. \quad (4.4.5)$$

Riassumiamo i risultati numerici ottenuti da Hamilton & Ward [3] sul processo che ha portato alla formazione della presente obliquità di Saturno.

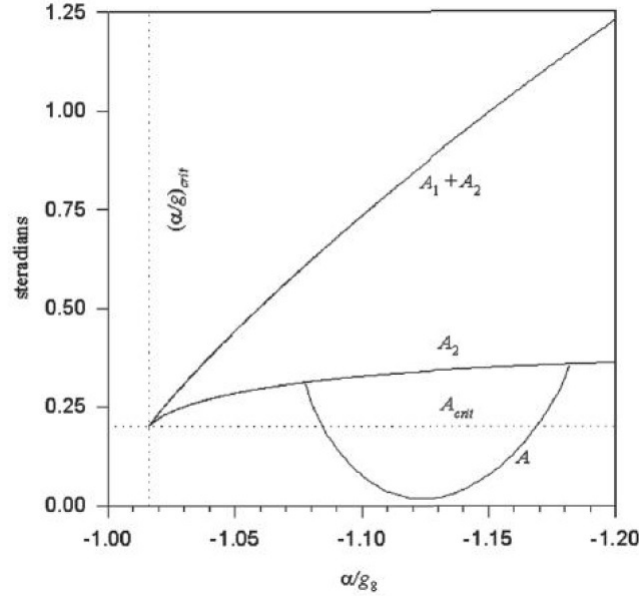


Figura 4.4: Aree dei domini in funzione di α/g . La linea in alto è la somma dei domini 1 e 2. La curva più in basso mostra la possibile posizione dell'area A racchiusa dalla corrente traiettoria dell'asse di spin. Le intersezioni di A con A_2 limitano il rapporto di frequenze per la cattura. Le intersezioni con A_{crit} limitano la curva A a precatture con obliquità minore di $14^\circ.5$, per le quali la cattura è certa.

Imponendo un passaggio in risonanza, iniziando con $|\alpha/g| > 1$ decrescente, otteniamo che, quando $|\alpha/g| \approx 1$, l'obliquità delle oscillazioni cresce e la risonanza impartisce un calcio di 10° all'obliquità. Questa inclinazione è troppo piccola e il massimo valore possibile che può raggiungere è di $14^\circ.5$ (non lo raggiunge nel caso in cui la condizione di adiabaticità sia violata).

Consideriamo allora il caso della cattura in risonanza. Prendiamo $|\alpha/g|$ crescente nel tempo, in modo che raggiunga il suo valore attuale alla fine della simulazione. Questo metodo può generare risultati positivi, ma non è consistente con il vettore di polo corrente: necessitiamo di un'ampiezza di librazione maggiore.

Per risolvere questo problema possiamo allora considerare un cambiamento di $|\alpha/g|$ più veloce, dimenticandoci del limite adiabatico. L'ampiezza delle librazione è legata direttamente all'obliquità delle oscillazioni dalla formula:

$$\Delta\Psi = \sqrt{\tan\theta/\sin I}\Delta\theta, \quad (4.4.6)$$

valida nel caso di piccole librazioni.

Un'ulteriore possibilità è quella di considerare un'ampiezza iniziale di Saturno più grande, dovuta ad un calcio all'obliquità precedentemente subito, e una successiva cattura in risonanza.

Nella figura (4.5) sono mostrate due evoluzioni dell'orbita dell'asse di spin di Saturno, ottenute da due simulazioni: nella prima l'ampiezza di librazione è minore della seconda, ma entrambe rappresentano una cattura in risonanza.

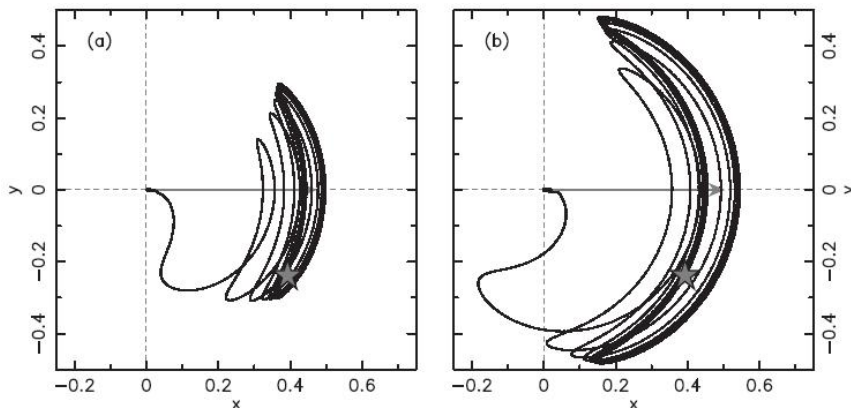


Figura 4.5: Due esempi dell'eccitazione dell'obliquità di Saturno dovuta alla cattura, ed evoluzione in risonanza con g_8 . L'asse di spin è proiettato nel piano (x, y) con $x = \sin \theta \cos \varphi$ e $y = \sin \theta \sin \varphi$. La freccia grigia mostra l'evoluzione dello stato di Cassini C_2 nel tempo di integrazione di 1 Gyr. Nella figura (a) assumiamo $\alpha_S = 0.785 \text{ arcsec yr}^{-1}$, che implica che l'obliquità finale dello stato C_2 è $\simeq 28^\circ.2$ e $\tau = 150 \text{ Myr}$. In (b) prendiamo $\alpha_S = 0.8 \text{ arcsec yr}^{-1}$ e di conseguenza l'obliquità di C_2 è $\simeq 30^\circ.3$ e $\tau = 135 \text{ Myr}$. La stella rappresenta l'orientazione attuale del vettore di polo di Saturno in queste coordinate.

4.5 Kuiper belt

La regressione nodale di Nettuno è causata dagli effetti gravitazionali dei pianeti interni alla sua orbita media. I pianeti esterni a Nettuno contribuiscono con un termine:

$$\delta g \approx -\frac{n_N}{4} \left(\frac{M_p}{1M_\odot} \right) \left(\frac{a_N}{a_p} \right)^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(a_N/a_p), \quad (4.5.1)$$

dove M_p e a_p sono la massa del pianeta e del semiasse maggiore, n_N e a_N moto medio e semiasse maggiore di Nettuno, M_\odot è la massa solare e $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\gamma)$ è un coefficiente di Laplace.

Il contributo di una Kuiper belt primordiale, di densità superficiale σ può essere stimata sostituendo M_p con $2\pi\sigma r dr$ e integrando. Partendo dalla distanza di Plutone (40 AU) e integrando fino a 50 AU otteniamo un contributo dell'ordine di $\delta g/g_8 \approx 10^{-2} M_K/(1M_\oplus)$. La massa della Kuiper belt primordiale era di circa $10M_\oplus$, questo è sufficiente per piazzare Saturno alla sinistra di $(\alpha/g)_{crit}$, imponendo quindi il passaggio attraverso la risonanza in seguito alla diminuzione della massa della cintura di asteroidi. Allo stesso tempo la migrazione verso l'esterno di Nettuno ha portato ad una diminuzione di $|g_8|$, in modo da raggiungere il valore dovuto per la successiva evoluzione del sistema.

4.6 Discussione sulla librazione

Vediamo quale dovrebbe essere stata l'origine della librazione di Saturno. Una possibilità è quella di un impatto tardivo radente al polo di Saturno, con la sua stessa velocità di fuga, che vari l'asse di spin. In questo caso però se l'impatto avesse ruotato l'asse di spin per più di metà della lunghezza della separatrice, allora avrebbe diminuito l'obliquità richiesta e avrebbe portato Saturno fuori dalla risonanza.

Un altro modo consiste nel considerare un passaggio non adiabatico attraverso la risonanza $j = 8$, in direzione della cattura, in un tempo scala compatibile con quello della librazione.

Un'alternativa per generare la librazione viene ottenuta considerando due passaggi attraverso g_8 iniziando con uno non adiabatico in direzione della non cattura durante la contrazione di Saturno.

Capitolo 5

Conclusioni

Possiamo concludere, riassumendo quanto appreso dai calcoli e dalle simulazioni. I risultati indicano che l'asse di spin di Giove può essere stato inclinato sia quando g_8 ha incontrato α_J nel primo stadio, sia quando g_7 si è avvicinato alla fine della migrazione planetaria. Perché il primo caso funzioni, l'attraversamento di g_8 deve essere stato veloce ma non troppo. Per ottenere inoltre la piena inclinazione attuale $dg_8/dt < 0.05 \text{ arcsec yr}^{-1} \text{ Myr}^{-1}$ e, a causa di questo, la migrazione di Nettuno e la dispersione del disco esterno devono essere avvenuti in maniera relativamente lenta. Se sono avvenuti velocemente, l'obliquità è dovuta al secondo caso, prendendo in considerazione cioè g_7 . In realtà probabilmente il processo è un insieme dei due descritti.

Per quanto riguarda Saturno la cattura in risonanza con g_8 deve essere avvenuta durante gli ultimi stadi della migrazione. Ciò che vincola la lentezza della migrazione è I_{68} , che dipende da quanto l'inclinazione di Nettuno venne eccitata durante l'instabilità. Usando il valore attuale di I_{68} otteniamo $\tau \simeq 100 \text{ Myr}$. Se $\tau > 200 \text{ Myr}$ la cattura è leggermente adiabatica e questo implica che lo stato risonante avrebbe un'ampiezza di librazione molto piccola, in tal modo non riusciamo quindi a spiegare l'ampiezza di librazione attuale di Saturno. Una soluzione migliore ci viene data per $\tau \simeq 100 - 150 \text{ Myr}$ dove la cattura non è strettamente adiabatica, ottenendo quindi una librazione corretta. Tuttavia un ulteriore vincolo per α_S deriva dall'attuale valore di obliquità di Saturno: assumendo che oggi il vettore di spin di Saturno sia in risonanza con g_8 , l'obliquità implica che lo stato C_2 deve essere localizzato a circa $(28 - 30)^\circ$, che implica $\alpha_S \simeq 0.78 - 0.80 \text{ arcsec yr}^{-1}$.

Bibliografia

- [1] Vokrouhlický D. & Nesvorný. 2015, ApJ, 806, 143
- [2] Ward W. R. & Hamilton D. P. 2004, AJ, 128, 2501
- [3] Hamilton D. P. & Ward W. R. 2004, AJ, 128,2510
- [4] Ward W. R. & Canup R. M. 2006, ApJL, 640, L91
- [5] Murray C. D. & Dermott S. F. 1999, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge
- [6] Applegate J. H., Douglas M. R., Gürsel Y., Sussman G. J. & Wisdom J. 1986, AJ, 92, 176
- [7] Colombo G. 1966, AJ, 71, 891
- [8] Bretagnon P. 1974, A&A, 30, 141
- [9] Nesvorný D. & Morbidelli A. 2012, AJ, 144, 117
- [10] Laskar J. 1985, A&A, 157, 59
- [11] Helled R., Anderson J. D., Schubert G. & Stevenson D. J. 2011, Icar, 216, 440
- [12] Peale S. 1974, AJ, 79, 722

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare al mio Relatore, il professor. Marzari Francesco, che mi ha aiutato nella stesura di questa tesi, e a tutti coloro che mi sono stati vicini in questi anni di università e che, spero, mi saranno anche vicini in futuro.

Prima di tutto un ringraziamento va ai miei genitori Noris e Attilio, che mi hanno supportata moralmente ed economicamente e mi hanno sempre detto di non mollare, ma di continuare in quello in cui credevo. Grazie alla mia nipotina Matilde che, anche nei momenti peggiori, mi fa tornare bambina e dimenticare ogni preoccupazione. A mio fratello Riccardo e a Cristina, sempre presenti anche quando non era loro compito. Grazie alle nonne, Luciana e Lidia, e agli zii, Emanuela, Luciana e Denis, che mi ricordano ogni giorno quanto è importante la famiglia.

Grazie al mio ragazzo Stefano che mi è stato vicino nei momenti peggiori e mi ha regalato quelli migliori. Grazie alla coinquilina e più che altro amica, migliore del mondo, Magiu, e a mia cugina (e quasi sorella) Alice, che anche dalla Francia mi è sempre vicina. Grazie ai miei amici e amiche di Latisana e Latisanotta, a quelle che ci sono state dall'asilo e non mi lasceranno mai, e a quelli che sono arrivati dopo, ma non meno importanti. Grazie ai miei amici dell'Università di Padova, che mi hanno sempre aiutata e sostenuta, anche quando stavo per mollare, e che alla magistrale mi mancano infinitamente. Grazie ai miei nuovi compagni dell'Università di Trieste che, anche se sono arrivata da poco, mi considerano una di loro.

Grazie agli amici di famiglia, in particolare a Mariuccia e Sebastiano, che hanno creduto in me e nel mio futuro. Un grazie speciale va alla mia professoressa delle medie, Cristina Cristin, che mi ha insegnato ad amare la matematica, e al mio professore del liceo, Giuseppe Lucilli, che mi ha guidato verso questa strada, sapendo che avrei avuto le carte in regola per farcela.