

Le correzioni ai rilievi solari odierni sulla meridiana in S. Petronio

di Alberto Nicelli

Si descrivono le correzioni necessarie per compensare gli errori sistematici dovuti all'odierno dissesto strutturale della celebre meridiana di Cassini. Un didattico 'vademecum' per il visitatore in S. Petronio interessato a dedurre indicazioni astronomiche accurate dai suoi rilievi solari.

Prologo

Cassini diceva che per capire tutti gli usi della sua meridiana bisogna avere “*qualche tintura di Matematica e Astronomia*” [1]. In effetti, fra le migliaia di visitatori che entrano ogni anno nella Basilica di S. Petronio a Bologna, sono davvero pochi quelli consapevoli di che cosa rappresenti nella storia della Scienza quella lunga meridiana che ne attraversa due navate. I più ci passano sopra con disinteresse, senza nemmeno degnarla di uno sguardo; alcuni le dedicano un po' di curiosità per pochi minuti, giusto per assistere una volta nella vita allo spettacolo del transito del Sole a mezzodì; ma ben pochi hanno un'idea di quali ricerche scientifiche abbia permesso nei secoli passati e quante potenzialità istruttive abbia ancora nel presente. Bisogna aver letto il *De Gnomone Meridiano Bononiensi* di Eustachio Manfredi per capire e apprezzare più profondamente quale formidabile strumento sia stato e quanta astronomia si possa imparare da esso. Il suo trattato, pubblicato nel 1736, è un dettagliato resoconto di ottant'anni di misure, calcoli e ricerche, con la spiegazione di tutte le tecniche con cui si determinavano dati di un'accuratezza mai raggiunta prima per quella rifondazione dell'astronomia che caratterizzò la sua epoca. Nell'opera si riversa l'espressa volontà di Manfredi di lasciare ai posteri tutta la storia dello strumento, la certificazione della sua affidabilità negli anni e i risultati con esso conseguiti. L'esposizione è ricca di descrizioni, di aneddoti, di commenti, e leggendo certe pagine sembra di udire ancora l'eco dei passi e delle voci dei tanti personaggi che in quegli anni si avvicendarono alle misure nelle navate di S. Petronio. Sullo sfondo di calcoli, analisi e tabelle, si percepisce distintamente un mondo in grande evoluzione e fermento: si incontrano, quali contemporanei protagonisti di quell'epoca, i nomi di Newton, Halley, Flamsteed, Celsius...;



fig. 1 Misura delle tangenti dei lembi solari

si colgono gli accenni alle pubblicazioni e alle corrispondenze private con cui gli scienziati si scambiano dati e notizie; si intuiscono i progressi della tecnologia ottica e dell'orologeria meccanica al servizio dell'astronomia; si assiste all'affiancamento del telescopio alle ricerche con la meridiana; si prende atto della rapida affermazione dell'uso dei logaritmi e della geometria analitica... Il trattato di Manfredi è quindi uno straordinario documento, un'emblematica testimonianza dell'epoca in cui la mentalità galileiana si è diffusa in tutta Europa e infonde prodigiosa energia alla ricerca

scientifico in tutti i campi. Non solo in astronomia, infatti, ma anche in fisica, biologia, meccanica, medicina, ottica, botanica, dalla passiva accettazione delle autorevoli teorie del passato si passa ad un'obiettiva apertura ai responsi della natura, agli effettivi risultati di osservazioni, esperimenti, misurazioni e catalogazioni. Non a caso è l'epoca degli strumenti che servono a osservare e a misurare: il telescopio, il microscopio, il barometro, il termometro, il micrometro... E la stessa meridiana di Cassini, appositamente concepita per studiare i moti del Sole, è da considerarsi a pieno titolo uno di questi strumenti.

Insomma, dopo aver letto il trattato di Manfredi, il visitatore in S. Petronio, con "qualche tintura di Matematica e Astronomia", riuscirà a percepire in quelle ampie navate gli echi di una grande e prestigiosa storia, guarderà con rinnovato sentimento di rispetto quella lunga meridiana e forse, facendosi partecipe di un rito secolare, si inchinerà anch'egli sulla linea al passaggio del Sole, per effettuare qualche misura e meditarne i responsi.

La meridiana in S. Petronio

Per comodità del lettore e per una migliore comprensione di ciò che segue riepiloghiamo brevemente le caratteristiche della meridiana. Essa può essere schematizzata come un cateto di un grande triangolo rettangolo in cui l'altro cateto è rappresentato dalla linea verticale idealmente tracciata dal centro del foro gnomonico al pavimento. Il piede di questa linea perpendicolare al pavimento, chiamato Punto Verticale, o Vertice, è il punto iniziale della linea meridiana. L'altezza del foro gnomonico è di 27.07 metri. La lunghezza della linea meridiana, determinata dall'altezza del Sole al solstizio invernale alla latitudine di Bologna, è di 67.72 metri. Cassini considerò come unità di misura la centesima parte dell'altezza gnomonica, chiamata Modulo. Quindi l'altezza gnomonica è 100 Moduli e la lunghezza della linea meridiana circa 250 Moduli. Il foro gnomonico, parallelo al pavimento, è circolare, di diametro pari a un millesimo dell'altezza gnomonica (0.100 Moduli). I raggi solari, passando attraverso il foro, formano all'interno della Basilica un cono di luce, la cui sezione col piano del pavimento è un'immagine luminosa di forma ellittica, che

rappresenta la proiezione del Sole. Gli estremi dell'asse maggiore dell'ellisse sono le proiezioni dei lembi solari: il lembo più vicino al Vertice è la proiezione del lembo superiore, quello più lontano è la proiezione del lembo inferiore. A mezzodì l'ellisse risulta simmetricamente divisa a metà dalla linea meridiana e questo è l'unico momento in cui vengono effettuate le misure (fig.1). Esse consistono nel rilevare sulla linea meridiana le distanze dal Vertice degli estremi dell'asse maggiore dell'ellisse. Queste due lunghezze vengono chiamate *tangenti*, perché la linea meridiana può essere considerata come tangente ad un cerchio ideale, centrato sul foro gnomonico e di raggio pari alla sua altezza, che rappresenta il meridiano locale (fig.2). Da queste due misure si ricava giorno per giorno l'angolo zenitale del Sole a mezzodì, dato fondamentale da cui è possibile dedurre le coordinate del Sole sulla sfera celeste e tutti i parametri astronomici che ne caratterizzano il moto e l'orbita rispetto alla Terra, come è ampiamente descritto nel trattato di Eustachio Manfredi [2].

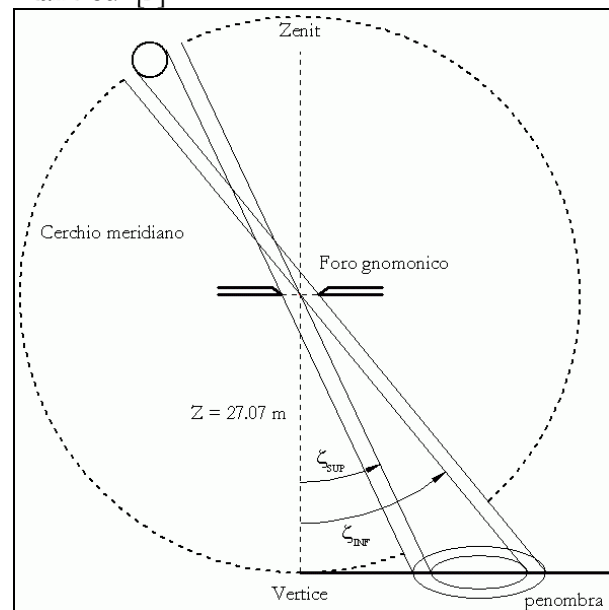


fig. 2 La proiezione del Sole sulla meridiana

La distanze zenitali dei lembi solari

Sia L_{SUP} la tangente del lembo superiore dell'immagine ellittica e L_{INF} quella del lembo inferiore. Esse sono dette *tangenti non corrette*, perché bisogna tener conto della larghezza della fascia di penombra causata dalle dimensioni del foro gnomonico (fig.2); secondo la definizione di Cassini la fascia di penombra è l'alone luminoso di larghezza uguale al raggio del foro

che circonda l'immagine teorica del disco solare, cioè quella idealmente prodotta da un foro puntiforme¹; essendo il raggio del foro uguale a 0.050 Moduli, le *tangenti corrette* L_{SUP}^C e L_{INF}^C sono date da:

$$L_{SUP}^C = L_{SUP} + 0.050$$

$$L_{INF}^C = L_{INF} - 0.050$$

Esse vanno poi divise per l'altezza gnomonica (100 Moduli) per ottenere le tangenti trigonometriche e quindi gli angoli zenitali dei lembi *apparenti* del Sole.

$$\zeta_{SUP}^a = \arctan\left(\frac{L_{SUP}^C}{100}\right)$$

$$\zeta_{INF}^a = \arctan\left(\frac{L_{INF}^C}{100}\right)$$

Per ottenere i veri angoli zenitali dei lembi solari bisogna applicare a questi valori le corrispondenti correzioni per la rifrazione e per la parallasse.

La correzione per la rifrazione

La rifrazione della luce proveniente dagli astri, attraversando l'atmosfera terrestre, ha come effetto di aumentarne l'altezza apparente, ovvero di diminuirne la distanza angolare dallo Zenit. La correzione da aggiungere all'angolo zenitale dipende da molteplici fattori, tra cui la temperatura, la pressione e l'umidità dell'aria, ma valori soddisfacenti si possono ottenere applicando la semplice formula di Bennett [6] (in primi d'arco):

$$R(\zeta) = \frac{1'}{\tan\left(90^\circ - \zeta + \frac{7.31}{90^\circ - \zeta + 4.4}\right)}$$

I valori ottenuti con questa formula risultano in ottimo accordo con quelli riportati nelle tabelle

¹ Modernamente si definisce come fascia di penombra la zona illuminata solo da una parte della sorgente luminosa; questa fascia è larga come il **diametro** del foro ed è divisa a metà dal contorno dell'immagine teorica del disco solare. La diversa definizione di Cassini non ha alcuna conseguenza sul calcolo delle tangenti.

correttive di Cassini [1][2]. Le discrepanze, per le distanze zenitali del Sole alla latitudine di Bologna, sono al massimo di qualche secondo d'arco.

La correzione per la parallasse di altezza

Il fenomeno della parallasse ha come effetto un abbassamento dell'altezza del Sole, ovvero un aumento dell'angolo zenitale rispetto a come lo si misurerebbe dal centro della Terra (fig.3). La quantità da sottrarre all'angolo zenitale è data da (in secondi d'arco):

$$P(\zeta) = +8.8'' \sin(\zeta)$$

Le trascurabili discrepanze fra i valori moderni ottenuti con questa formula e i valori di Cassini sono dovute al valore di parallasse orizzontale, assunto da Cassini uguale a 10'' invece del valore odieramente accertato di 8.8''.

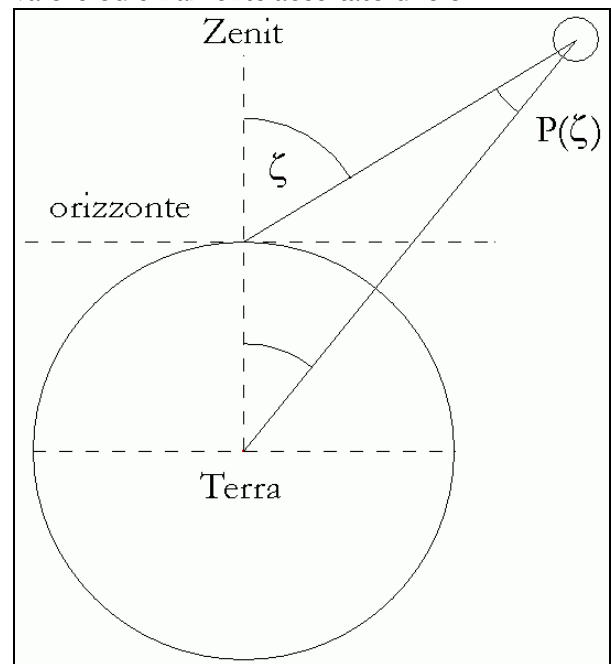


fig. 3 La parallasse di altezza

La distanza zenitale del Sole

I veri angoli zenitali dei lembi solari, depurati da rifrazione e parallasse, sono dati da:

$$\zeta_{SUP} = \zeta_{SUP}^a + R(\zeta_{SUP}^a) - P(\zeta_{SUP}^a)$$

$$\zeta_{INF} = \zeta_{INF}^a + R(\zeta_{INF}^a) - P(\zeta_{INF}^a)$$

Si noti che, in linea di principio, la correzione per la parallasse dovrebbe essere applicata all'angolo già corretto dalla rifrazione, ma dal

punto di vista pratico la differenza che risulta applicandola all'angolo apparente è trascurabile. Dagli angoli zenitali dei lembi si deduce la distanza zenitale del centro del Sole:

$$\zeta_{Sole} = \frac{\zeta_{INF} + \zeta_{SUP}}{2}$$

Il diametro angolare del Sole

Il diametro angolare Φ del Sole è dato da:

$$\Phi = \zeta_{INF} - \zeta_{SUP}$$

Cassini, per esperienza, aumentava della sessantesima parte il valore così ricavato, perché esso risulta inevitabilmente sottostimato, a causa della luce diffusa nella Basilica che attenua il contrasto di luminosità fra i lembi della proiezione solare e il pavimento. L'abilità di Cassini nel valutare empiricamente questo fattore correttivo è confermata dal fatto che l'errore statistico medio sui diametri solari da lui misurati in S. Petronio, rispetto ai moderni valori teorici, si aggira sui 30" in difetto, cioè all'incirca un sessantesimo del diametro solare, il cui valore medio è 32'.

Gli errori sistematici sui rilievi odierni

La procedura fin qui esposta per ricavare l'angolo zenitale del Sole è quella classica, descritta da Cassini e da Eustachio Manfredi. Oggigiorno, però, le misure delle tangenti sulla linea meridiana richiedono una correzione per compensare gli errori sistematici dovuti all'attuale dissesto strutturale dello strumento. Infatti dai rilievi odierni si ricavano distanze zenitali del Sole sempre maggiori di quelle teoriche, con discrepanze comprese fra 100 e 200 secondi d'arco, ovvero circa dieci volte più grandi degli errori medi ricavabili dalle misure effettuate ai tempi di Cassini [2]. Questo significa che le tangenti misurate risultano sempre maggiori dei valori reali, il che può essere spiegato solo da un dissesto strutturale, ovvero da uno spostamento del foro gnomonico rispetto alla sua posizione originale e/o da una variazione del livello della linea meridiana. L'analisi statistica fatta dall'autore di questo articolo su numerosi rilievi effettuati da Sergio Giordani e Giovanni Paltrinieri fra il 2001 e il 2003, insieme alle accurate misure e verifiche effettuate nel 2005 dall'Ing.

Alessandro Gunella sulla posizione del foro gnomonico e da Giovanni Paltrinieri con l'Ing. Lorenzo Reggiani e il Geom. Paola Ferri sul livello della linea, hanno dimostrato [5] che l'altezza gnomonica non è variata rispetto a quella nominale, che il foro risulta spostato di ben 1.8 cm verso Nord e di 0.7 cm verso Est rispetto al Punto Verticale, e che la linea ha subito in tutta la sua estensione un consistente sprofondamento, in progressivo aumento dall'estremità del solstizio estivo all'estremità del solstizio invernale (particolarmente accentuato vicino alle due celebri colonne che rasentano la linea).

Posizione sulla linea meridiana	Moduli	Sprofondamento (millimetri)
0	0.00	0
14	14.00	5.6
28	28.00	9.4
Lembo Cancro (ellisse)	37.83	12.5
Centro Cancro (ellisse)	38.43	12.8
Lembo Cancro (ellisse)	38.98	13.1
42	42.00	14.0
Bordo Leone-Gemelli	43.89	14.6
Centro Leone-Gemelli	45.02	14.1
Bordo Leone-Gemelli	46.38	12.3
50	50.00	14.6
56	56.00	16.2
Bordo Vergine-Toro	63.70	15.2
Centro Vergine-Toro	64.97	15.0
Bordo Vergine-Toro	66.18	15.7
76	76.00	16.8
88	88.00	20.9
Bordo Bilancia-Ariete	97.09	24.0
Centro Bilancia-Ariete	98.27	25.0
Bordo Bilancia-Ariete	99.58	25.2
104	104.00	31.2
108 (Colonna)	108.00	35.3
114	114.00	33.2
124	124.00	28.9
128	128.00	26.7
132	132.00	25.3
142	142.00	27.6
Bordo Scorpione-Pesci	146.96	24.9
Centro Scorpione-Pesci	148.22	24.5
Bordo Scorpione-Pesci	149.44	24.2
156	156.00	23.8
164	164.00	27.4
174	174.00	39.7
180 (Colonna)	180.00	44.2
184	184.00	42.5
190	190.00	38.9
196	196.00	37.5
202	202.00	35.5
Bordo Sagittario-Acquario	209.88	33.7
Centro Sagittario-Acquario	211.12	32.6
Bordo Sagittario-Acquario	212.36	33.0
222	222.00	39.0
228	228.00	41.5
234	234.00	41.1
Lembo Capricorno (ellisse)	243.40	42.3
Centro Capricorno (ellisse)	246.80	41.0
Lembo Capricorno (ellisse)	250.15	41.6

Sprofondamenti misurati nel 2005 sulla linea meridiana

Le misure di sprofondamento sono riassunte in tabella: le posizioni sulla linea sono indicate dai corrispondenti Moduli; la posizione 0 corrisponde al Punto Verticale, preso come riferimento per misurare lo sprofondamento degli altri punti; i Lembi e il Centro dei Segni Cancro e Capricorno si riferiscono alle ellissi solstiziali incise sui rispettivi marmi; per gli altri Segni i Bordi sono i lati dei marmi corrispondenti e il Centro è il punto intermedio fra i Bordi.

Come correggere le tangenti misurate

Indichiamo con $Z = 27.07$ metri (100 Moduli) l'altezza gnomonica; con ΔZ il valore dello sprofondamento della linea meridiana in un dato punto e con $\Delta X = 0.018$ metri (0.0665 Moduli) lo spostamento del foro gnomonico verso Nord. Non prendiamo in considerazione lo spostamento del foro verso Est, perché non ha effetti sensibili sulle misure delle tangenti dei lembi solari. Indichiamo con L_{SUP}^M e L_{INF}^M i valori misurati delle tangenti e con L_{SUP} e L_{INF} quelli ideali, non affetti dagli errori sistematici dovuti al dissesto strutturale della meridiana. Per il lembo superiore deve essere (fig.4):

$$L_{SUP}^M - L_{SUP} = \Delta Z_{SUP} \tan(\zeta_{SUP}) + \Delta X$$

quindi, ponendo :

$$\tan(\zeta_{SUP}) = \frac{L_{SUP}^M - \Delta X}{Z}$$

si ricava:

$$L_{SUP} = \frac{L_{SUP}^M - \Delta X}{\left(1 + \frac{\Delta Z_{SUP}}{Z}\right)}$$

Per il lembo inferiore vale ovviamente la formula del tutto analoga:

$$L_{INF} = \frac{L_{INF}^M - \Delta X}{\left(1 + \frac{\Delta Z_{INF}}{Z}\right)}$$

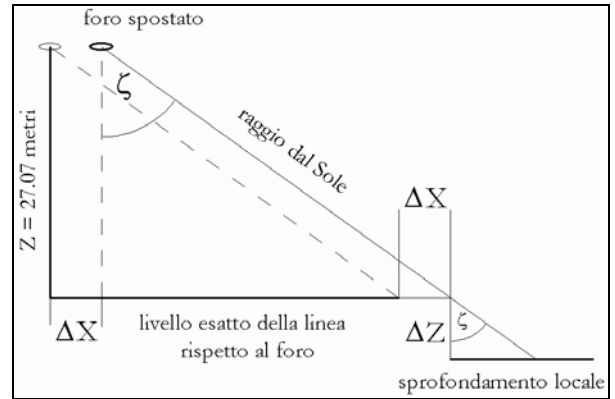


fig. 4 Il dissesto strutturale della meridiana, causa degli errori sistematici

Per esempio, il 12 Marzo 2003 le tangenti misurate furono (in Moduli) $L_{INF}^M = 111.800$ e $L_{SUP}^M = 109.660$. I valori di sprofondamento ΔZ_{SUP} e ΔZ_{INF} in corrispondenza dei lembi si stimano per interpolazione lineare dalle misure riportate in tabella. Per comodità del lettore riportiamo i calcoli da effettuare:

$$\frac{\Delta Z_{SUP} - 35.3}{109.660 - 108} = \frac{33.2 - 35.3}{114 - 108}$$

$$\frac{\Delta Z_{INF} - 35.3}{111.800 - 108} = \frac{33.2 - 35.3}{114 - 108}$$

da cui $\Delta Z_{SUP} = 34.7$ mm (0.1282 Moduli) e $\Delta Z_{INF} = 34.0$ mm. (0.1256 Moduli). Quindi si ottiene (in Moduli):

$$L_{SUP} = 109.453$$

$$L_{INF} = 111.593$$

e applicando la correzione per la larghezza della fascia di penombra intorno alla proiezione solare, pari al raggio del foro (0.050 Moduli):

$$L_{SUP}^C = 109.453 + 0.050 = 109.503$$

$$L_{INF}^C = 111.593 - 0.050 = 111.543$$

Dividendo per l'altezza gnomonica (100 Moduli) si ottengono le tangenti trigonometriche degli angoli zenitali. Ricavando gli angoli e depurandoli da rifrazione e parallasse, risulta:

$$\zeta_{SUP} = 47^{\circ} 36' 48''$$

$$\zeta_{INF} = 48^{\circ} 8' 24''$$

e dalla loro media aritmetica si ricava l'angolo zenitale del Sole: $47^{\circ} 52' 36''$, molto vicino a quello teorico² di $47^{\circ} 52' 31''$. Senza correggere le tangenti dagli errori sistematici avremmo ottenuto un angolo zenitale di $47^{\circ} 55' 48''$, con una discrepanza di ben $3' 17''$ in eccesso rispetto al valore teorico.

Come correggere a posteriori l'angolo zenitale del Sole

È possibile correggere a posteriori l'angolo zenitale del Sole, ricavato senza correggere le tangenti dagli errori sistematici, sottraendo al valore misurato ζ_M la quantità data la formula:

$$\Delta\zeta_M = \frac{\Delta Z \tan(\zeta_M) + \Delta X}{Z[1 + \tan^2(\zeta_M)]}$$

con $\Delta X = 0.0665$ Moduli e $Z = 100$ Moduli. Nel nostro esempio:

$$\zeta_M = 47^{\circ} 55' 48''$$

e $100 \times \tan(\zeta_M) = 110.789$ Moduli, quindi, interpolando linearmente dalle misure riportate in tabella:

$$\frac{\Delta Z - 35.3}{110.789 - 108} = \frac{33.2 - 35.3}{114 - 108}$$

da cui si ricava $\Delta Z = 34.3$ mm (0.1267 Moduli). Facendo i calcoli risulta $\Delta\zeta_M = 3' 12''$. L'angolo zenitale corretto del Sole è quindi:

$$\zeta_{Sole} = \zeta_M - \Delta\zeta_M = 47^{\circ} 52' 36''$$

Come calcolare a priori le tangenti dei lembi

Può capitare che l'osservatore voglia calcolare in anticipo in quali punti della meridiana passeranno i lembi della proiezione solare in un dato giorno, per prepararsi alla misura sulla linea laddove è previsto il passaggio del Sole. Per descrivere il procedimento prendiamo

ancora come esempio il 12 Marzo 2003, così potremo verificare i calcoli confrontandone i risultati con le tangenti misurate quel giorno. Alle ore 12 di Tempo Vero, il Sole aveva:

$$\text{declinazione } \delta = -3^{\circ} 22' 54''$$

$$\text{diametro } \Phi = 32.2'$$

quindi, sapendo che la latitudine di S. Petronio è $\varphi = 44^{\circ} 29' 37''$ (misurata da Giovanni Paltrinieri con un GPS in prossimità del foro gnomonico), l'angolo zenitale del Sole era:

$$\zeta_{Sole} = \varphi - \delta = 47^{\circ} 52' 31''$$

Siccome il diametro del disco solare misurato sulla meridiana risulta sempre sottostimato (a causa della luce diffusa presente nella Basilica), e per ottenere quello corretto Cassini lo aumentava della sessantesima parte [2], ne consegue che, per calcolare le tangenti misurate sulla linea, invece di $\Phi = 32.2'$ dobbiamo usare un diametro Φ_M più piccolo, tale che:

$$\Phi_M = (60/61) \Phi = 31' 40''$$

Con questo valore fittizio del diametro solare ricaviamo gli angoli zenitali dei lembi:

$$\zeta_{SUP} = \zeta_{Sole} - \Phi_M/2 = 47^{\circ} 36' 41''$$

$$\zeta_{INF} = \zeta_{Sole} + \Phi_M/2 = 48^{\circ} 8' 21''$$

Dopodiché si somma a questi valori il contributo della parallasse e si sottrae il contributo della rifrazione, calcolato tramite la formula inversa di Samundsson [6] (in primi d'arco):

$$\tilde{R}(\zeta) = \frac{1.02'}{\tan\left(90^{\circ} - \zeta + \frac{10.3}{90^{\circ} - \zeta + 5.11}\right)}$$

cioè si deducono gli angoli zenitali apparenti:

$$\zeta_{SUP}^a = \zeta_{SUP} + P(\zeta_{SUP}) - \tilde{R}(\zeta_{SUP})$$

$$\zeta_{INF}^a = \zeta_{INF} + P(\zeta_{INF}) - \tilde{R}(\zeta_{INF})$$

² Ricavato dal noto programma GEFEM dell'Ing. Gianni Ferrari.

che risultano essere:

$$\zeta_{SUP}^a = 47^\circ 35' 41''$$

$$\zeta_{INF}^a = 48^\circ 7' 20''$$

Le vere distanze dei lembi della proiezione solare dal Vertice, compresa la larghezza della fascia di penombra (0.050 Moduli), cioè le tangenti *non corrette*, sono date da:

$$L_{SUP} = 100 \times \tan(\zeta_{SUP}^a) - 0.050 = 109.444$$

$$L_{INF} = 100 \times \tan(\zeta_{INF}^a) + 0.050 = 111.589$$

e da esse si ricavano le tangenti realmente misurate a causa degli errori sistematici:

$$L_{SUP}^M = (1 + \frac{\Delta Z_{SUP}}{Z})L_{SUP} + \Delta X$$

$$L_{INF}^M = (1 + \frac{\Delta Z_{INF}}{Z})L_{INF} + \Delta X$$

con $\Delta X = 0.0665$ Moduli e $Z = 100$ Moduli. I valori ΔZ_{SUP} e ΔZ_{INF} in corrispondenza dei lembi si stimano per interpolazione lineare dagli sprofondamenti riportati in tabella:

$$\frac{\Delta Z_{SUP} - 35.3}{109.444 - 108} = \frac{33.2 - 35.3}{114 - 108}$$

$$\frac{\Delta Z_{INF} - 35.3}{111.589 - 108} = \frac{33.2 - 35.3}{114 - 108}$$

da cui $\Delta Z_{SUP} = 34.8$ mm (0.1286 Moduli) e $\Delta Z_{INF} = 34.0$ mm (0.1256 Moduli). Si ottengono quindi i valori $L_{SUP}^M = 109.651$ e $L_{INF}^M = 111.795$, in buon accordo con i valori 109.660 e 111.800 realmente misurati quel giorno. Le rispettive discrepanze equivalgono a circa 2 millimetri e 1 millimetro.

Bibliografia

[1] Gian Domenico Cassini – *La Meridiana del Tempio di S. Petronio in Bologna* – Bologna, 1695 (riedizione a cura di Giovanni Paltrinieri, Editore Forni, Bologna, 2000)

[2] Eustachio Manfredi – *De Gnomone Meridiano Bononiensi* – Bologna, 1736 (traduzione dal latino di Alessandro Gunella, inedita)

[3] Giovanni Paltrinieri – *La Meridiana della Basilica di S. Petronio in Bologna* – Bologna, 2001

[4] John L. Heilbron – *Il Sole nella Chiesa* – Ed. Compositori ISBN 88-7794-506-0, 2005
Titolo originale: *The Sun in the Church*, Harvard University Press, Cambridge, 1999

[5] Nicelli; Gunella; Paltrinieri – *La Meridiana di Cassini nell'Anno Cassiniano: rilievi solari odierni, errori sistematici e verifiche strutturali* – Atti XIII Seminario di Gnomonica, Lignano Sabbiadoro (UD), 2005

[6] Jean Meeus – *Astronomical Algorithms* – Willmann-Bells, Inc., Richmond, Virginia, 1991